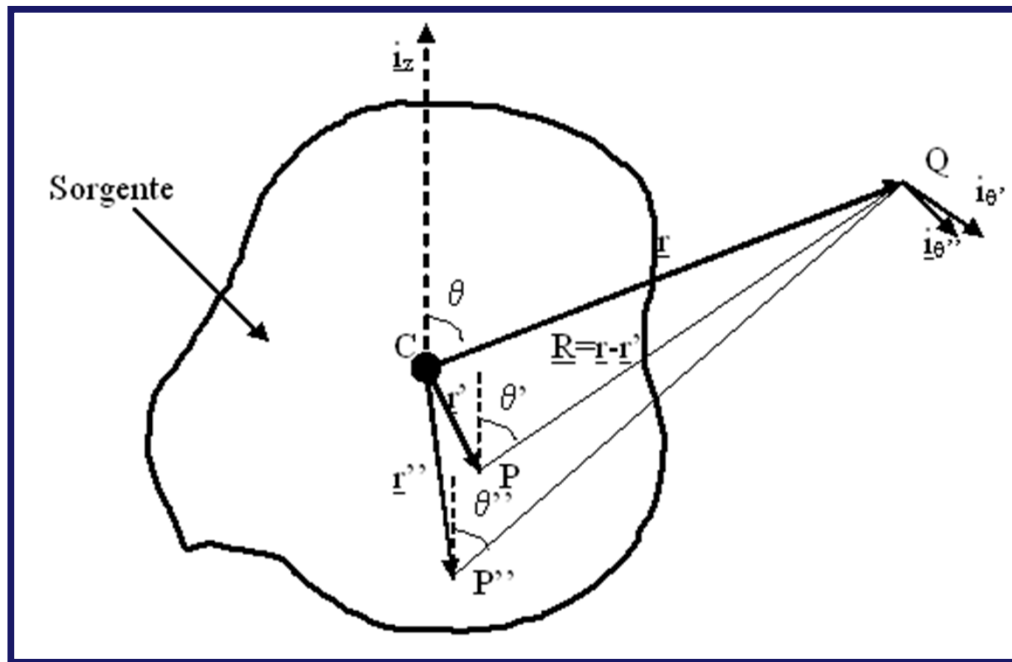


Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo Lontano di una Sorgente

Consideriamo una sorgente di diametro D_s e calcoliamone il campo nel punto Q a distanza r dal centro della sorgente.



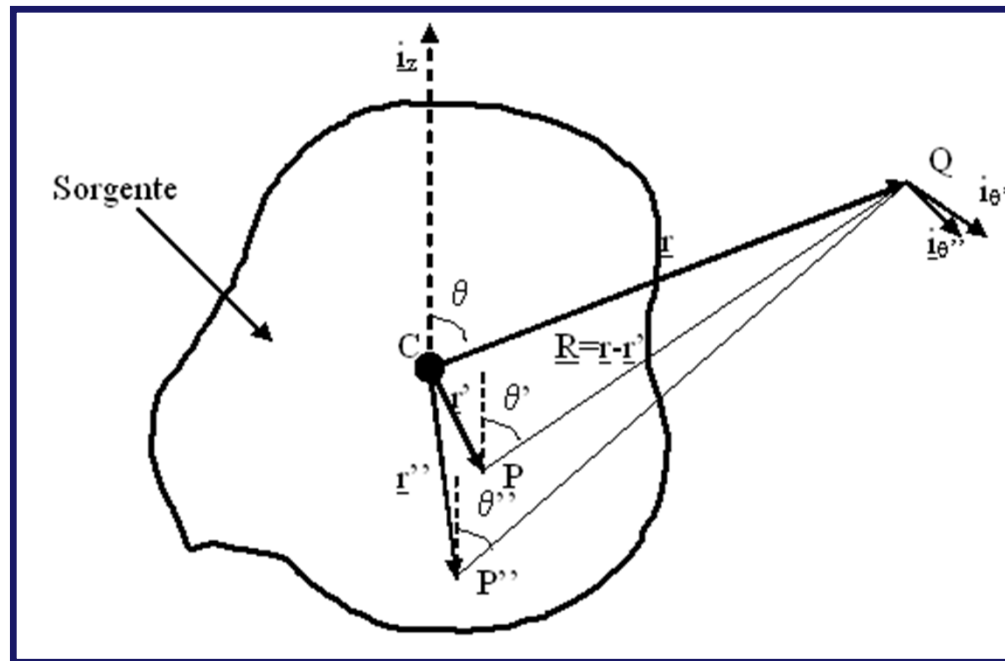
Supponiamo che la corrente sia tutta rivolta lungo \hat{i}_z e consideriamone un elemento, che può essere rappresentato come dipolo di ampiezza $I(p)Dz$.

La condizione $r \gg D_s$, con D_s diametro della sorgente, assicura che tale sorgente, vista dal punto Q, è geometricamente puntiforme e quindi che tutti i raggi, partenti da qualunque punto della sorgente verso Q, sono paralleli.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo Lontano di una Sorgente

Se $\beta(r')^2/2r$ è piccolo, allora anche i ritardi di fase tra i vari punti della sorgente e Q possono essere calcolati considerando i raggi paralleli (zona di Fraunhofer).



Se i raggi sono paralleli, allora:

$$\underline{E} = j \frac{\zeta I(p) \Delta z}{2\lambda r} \sin \theta \underline{i}_\theta e^{-j\beta|r-r'|}$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo Lontano di una Sorgente

Se siamo in zona di Fraunhofer (considerando quindi anche la condizione sulle fasi):

$$\underline{E} = j \frac{\zeta I(p) \Delta z}{2\lambda r} \sin \vartheta \underline{i}_\vartheta e^{-j\beta r} e^{j\beta \underline{i}_r \cdot \underline{r}'}$$

si noti che θ è l'angolo compreso fra la direzione del dipolo (supposto orientato lungo l'asse z) ed il punto campo.

Se il punto campo si trova in zona di Fraunhofer, allora se due diversi dipoli della sorgente posti in P' e P'' hanno la stessa direzione, gli angoli θ' , θ'' si possono considerare uguali all'angolo θ formato dal dipolo posto al centro della sorgente ed il punto campo (con un errore sugli angoli dell'ordine di $|\underline{r}'|/|\underline{r}|$).

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo Lontano di una Sorgente

La corrente $I(p)$ varia punto per punto e dipende dalla forma della sorgente.

Il campo totale si ottiene integrando sulla sorgente.

Ovviamente se vi sono componenti di \underline{J} ortogonali a z , vi saranno tre contributi al campo, rivolti anche lungo \underline{i}_φ .

Se possiamo introdurre una ampiezza I_0 della distribuzione di corrente, allora il campo totale vale:

$$\underline{E} = j \frac{\zeta I_0}{2\lambda r} e^{-j\beta r} \left[\sin \vartheta \underline{i}_\vartheta \int \frac{I(p)}{I_0} \Delta z e^{j\beta \underline{i}_r \cdot \underline{r}'} dV \right]$$

e l'espressione tra parentesi prende il nome di altezza efficace in trasmissione, e dipende da (θ, φ) e dalla forma della sorgente.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo Lontano di una Sorgente

Più in generale si definisce altezza efficace:

$$\underline{h}(\vartheta, \varphi) = -\left[\underline{I} - \underline{i}_r \underline{i}_r\right] \cdot \int \frac{\underline{J}}{I_0} e^{j\beta \underline{i}_r \cdot \underline{r}'} dV' = \frac{\underline{E}_\infty}{j \frac{\zeta I_0}{2\lambda r} e^{-j\beta r}}$$

essendo \underline{E}_∞ il campo a grande distanza, che può essere calcolato utilizzando la sovrapposizione degli effetti o a partire dal potenziale vettore.

Le tre condizioni che individuano la zona di Fraunhofer, e che quindi consentono di esprimere il campo irradiato come :

$$\underline{E} = j \frac{\zeta I \underline{h}}{2\lambda r} e^{-j\beta r}$$

- sono:
- | | |
|--------------------------|--|
| Condizioni sull'ampiezza | 1) $\beta r \gg 1$
2) $r \gg D_s / 2$ |
| Condizione sulla fase | 3) $\frac{\beta}{2r} \left(\frac{D_s}{2} \right)^2 \ll 1$ |

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo Lontano di una Sorgente

Possiamo ottenere delle valutazioni quantitative delle approssimazioni introdotte. In particolare accettando un errore di ampiezza del 10% e di fase di $\pi/8$ si ha:

$$\begin{aligned} \bullet \quad r - \frac{D_s}{2} \gg \lambda &\rightarrow \beta \left(r - \frac{D_s}{2} \right) > 10 \rightarrow r > \frac{D_s}{2} + \frac{5\lambda}{\pi} \\ \bullet \quad r \gg \frac{D_s}{2} &\rightarrow r > 5D_s \\ \bullet \quad \frac{\beta(r')^2}{2r} \ll 1 &\rightarrow \frac{\beta D_s^2}{8r} < \frac{\pi}{8} \rightarrow r > \frac{2D_s^2}{\lambda} \end{aligned}$$

(condizioni geometriche, con errore del 10%)

(condizioni di fronti di fase piani, con errore di $\pi/8$)

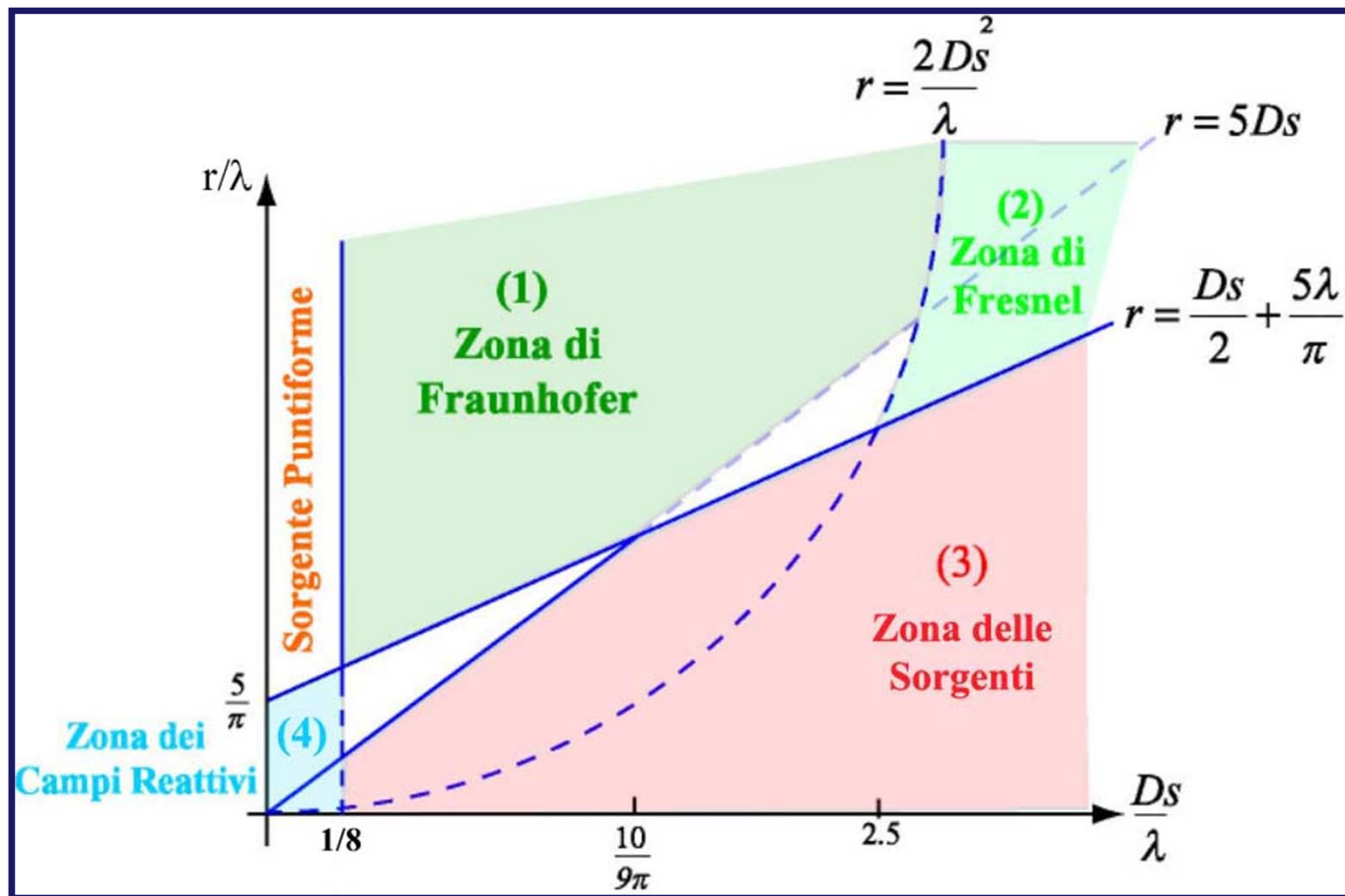
Si aggiunge inoltre la condizione per considerare la sorgente come puntiforme:

$$\bullet \quad \beta \underline{i}_r \cdot \underline{r}' \ll 1 \rightarrow \beta \underline{i}_r \cdot \underline{r}' \ll \beta \frac{D_s}{2} < \frac{\pi}{8} \rightarrow D_s < \frac{\pi}{4} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{8} \quad (\text{Sorgente Puntiforme})$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

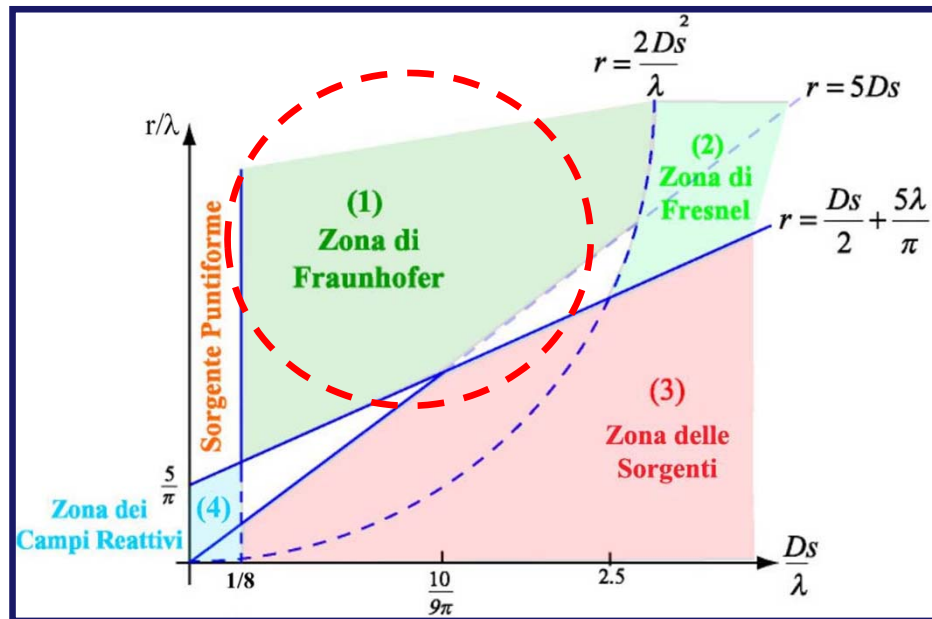
Campo Lontano di una Sorgente

Riportando tali condizioni in un grafico si ottengono le varie zone in cui utilizzare una approssimazione piuttosto che un'altra.



Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo Lontano di una Sorgente



La zona (1) è la zona di campo lontano, che può essere raggiunta subito per antenne di piccole dimensioni (al minimo dipoli elementari, che però sono di scarso interesse) o ad una certa distanza per antenne via via più grandi. In questa zona, detta di Fraunhofer, il campo si presenta come onda piana e la fase varia linearmente.

All'interno della zona di Fraunhofer si può porre:

$$|r - r'| \cong r - \underline{i}_r \cdot \underline{r}'$$

e i campi variano come $e^{-j\beta r}$.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo Lontano di una Sorgente

Nella zona (2), detta “zona di Fresnel”, non vale più l'approssimazione fatta per il campo lontano. Devo considerare termini di fase sferici, dovuti al termine di grado 2 presente nello sviluppo in serie dell'esponenziale del campo:

$$\underline{E} = j \frac{\zeta}{2\lambda r} \underline{i}_g \int I(z) e^{-j\beta|\underline{r}-\underline{r}'|} dz$$

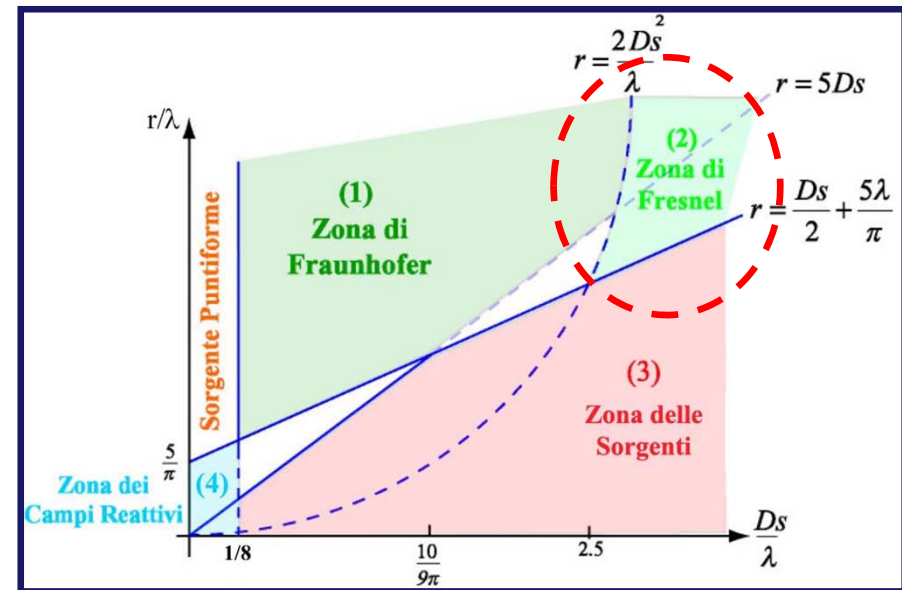
dove \underline{r}' è il vettore posizione del punto sorgente.

Ciò avviene per antenne grandi alcune lunghezze d'onda e oltre, per le quali nella zona di Fresnel i fronti di fase non sono piani ma sferici. Si ha dunque in tale zona:

$$|\underline{r} - \underline{r}'| \cong r - \underline{i}_r \cdot \underline{r}' + \frac{1}{2r} \left[(r')^2 - (\underline{i}_r \cdot \underline{r}')^2 \right] = r - \underline{i}_r \cdot \underline{r}' + \frac{1}{2r} |\underline{r}'_T|^2$$

essendo $|\underline{r}'_T|$ la parte di \underline{r}' trasversa ad \underline{i}_r .

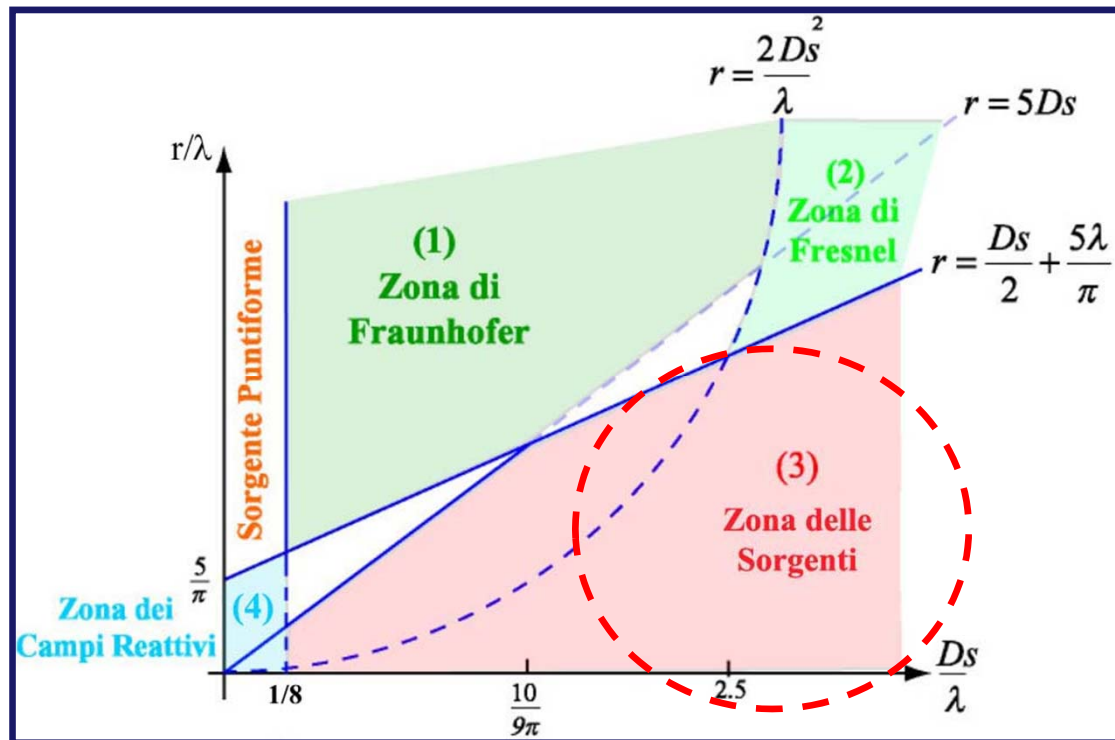
Quindi per sorgenti grandi ($Ds > 2.5\lambda$) occorre conservare un ulteriore termine dello sviluppo in serie del fattore di fase all'esponenziale.



Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo Lontano di una Sorgente

Nella zona (3), detta “zona dei campi radiativi”, o “zona delle sorgenti” cade sicuramente la seconda disuguaglianza, e la sorgente non può più esser vista come sorgente puntiforme, in quanto assume dimensioni troppo elevate (ad esempio antenna a riflettore con sorgente).



Come conseguenza di ciò il fronte di fase varia rapidamente e in maniera irregolare, e allo stesso modo varia la distribuzione di potenza radiale.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo Lontano di una Sorgente

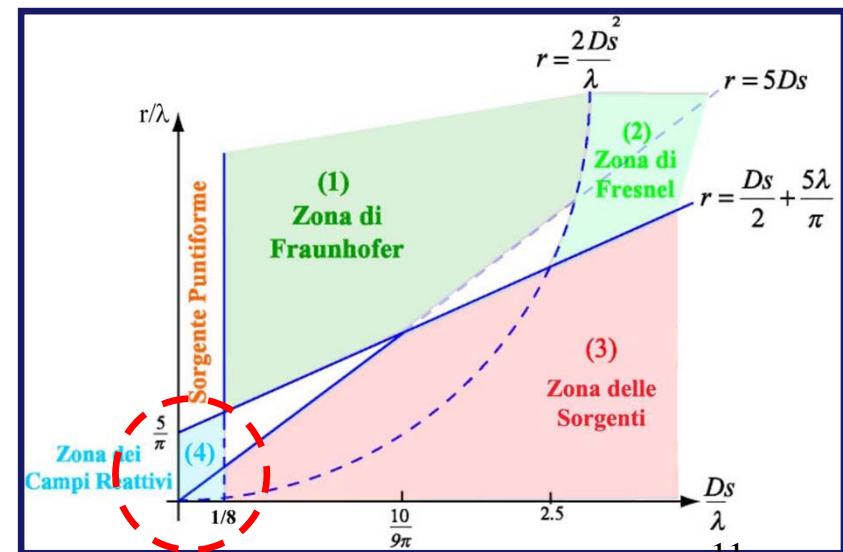
Infine la zona (4) è la “zona dei campi reattivi”, nella quale non vale più la prima condizione

$$r > \frac{D_s}{2} + \frac{5\lambda}{\pi}$$

Pertanto questa zona esiste soltanto per sorgenti molto piccole.

In questo caso, quindi, io posso ancora considerare la sorgente come un punto, però, non essendo più R, punto campo, molto grande rispetto alle dimensioni della sorgente, io devo considerare anche il contributo dovuto ai campi reattivi.

In questa zona siamo dunque in prossimità dell'antenna e intervengono i termini in r^2 e r^3 . Se inoltre sto molto vicino all'asse verticale, dove D_s è molto piccolo, il fattore di fase $e^{-j\vec{i}_r \cdot \vec{r}'}$ può essere approssimato con 1, perché in questo caso l'esponente è piccolo e nell'altezza efficace mi rimane solo l'integrale della corrente.



Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore

Le onde piane sono soluzioni libere delle equazioni di Maxwell, ovvero sono campi elettromagnetici che possono esistere in tutto lo spazio anche in assenza di sorgenti.

Tuttavia interessano anche(e soprattutto) le soluzioni forzate, ovvero le soluzioni prodotte da correnti elettriche (e magnetiche), in particolare da quelle impresse.

Come abbiamo visto dal teorema di Poynting, infatti, sono tali correnti che forniscono potenza al campo e, in definitiva, possono produrlo.

Ci occuperemo principalmente del campo dovuto a correnti elettriche, rimandando a più avanti quello dovuto a correnti magnetiche.

Grazie alla sovrapposizione degli effetti, il campo di entrambe le correnti può essere calcolato come somma del campo delle sole correnti elettriche e di quello delle sole correnti magnetiche.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore

Consideriamo delle correnti elettriche (imprese o indotte) \underline{J} in un mezzo equivalente al vuoto.

Per semplicità considereremo anzi direttamente il vuoto, ma basterà introdurre i valori di ϵ e μ per ottenere, se necessario, i risultati validi nel caso di altri mezzi.

Le equazioni di Maxwell da risolvere sono allora

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{E} &= -j\omega\mu_0 \underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} &= j\omega\epsilon_0 \underline{E} + \underline{J} \\ \nabla \cdot \epsilon_0 \underline{E} &= \rho \\ \nabla \cdot \mu_0 \underline{H} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore

Possiamo esprimere la soluzione generale di tali equazioni in termini di potenziali elettromagnetici. Infatti, dalla quarta equazione delle (1) segue l'esistenza di una funzione vettoriale $\underline{A}(\mathbf{r})$ tale che

$$\mu_0 \underline{H} = \nabla \times \underline{A} \quad (2)$$

Sostituendo poi nella prima segue

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega \nabla \times \underline{A} \quad \rightarrow \quad \nabla \times (\underline{E} + j\omega \underline{A}) = 0$$

e quindi il vettore $\underline{E} + j\omega \underline{A}$ è irrotazionale.

Questa relazione è più generale di quella elettrostatica (\underline{E} è conservativo) e ad essa si riduce se $\omega = 0$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore

Esiste quindi una funzione scalare $\phi(\mathbf{r})$ tale che

$$\underline{E} + j\omega \underline{A} = -\nabla \phi \quad (3)$$

Qualunque campo dovuto a sorgenti solo elettriche (eventualmente nulle) può quindi essere espresso mediante i due potenziali \underline{A} e ϕ , detti potenziale vettore e potenziale scalare.

Noti i potenziali, i campi si ottengono semplicemente per derivazione

$$\underline{E} = -j\omega \underline{A} - \nabla \phi$$
$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{A} \quad (4)$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore

Notiamo subito che, per un dato campo, esistono più coppie di potenziali possibili. Siano \underline{A} e ϕ una coppia di potenziali per un certo campo. Poichè il rotore di un gradiente è nullo, allora anche

$$\underline{A}' = \underline{A} + \nabla \psi$$

fornisce lo stesso campo magnetico di \underline{A} , qualunque sia la funzione scalare $\psi(r)$.

Per ottenere lo stesso campo elettrico occorre modificare anche il potenziale vettore.

Per ottenere che \underline{A}' e ϕ' , essendo ϕ' un potenziale scalare modificato, forniscano lo stesso campo elettrico dei potenziali originari \underline{A} e ϕ occorre imporre

$$-j\omega \underline{A} - \nabla \phi = -j\omega \underline{A}' - \nabla \phi' = -j\omega (\underline{A} + \nabla \psi) - \nabla \phi'$$

E risolvendo si ha:

$$\nabla \phi' = \nabla \phi - j\omega \nabla \psi \quad \rightarrow \quad \phi' = \phi - j\omega \psi$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore

Quindi tutte le coppie di potenziali possibili sono date da

$$\begin{aligned}\underline{A}' &= \underline{A} + \nabla \psi \\ \phi' &= \phi - j\omega\psi\end{aligned}\tag{5}$$

al variare della funzione arbitraria $\psi(r)$.

Le (5) prendono il nome di trasformazioni di gauge, e mostrano che, almeno nella fisica classica, solo i campi, e non anche i potenziali, hanno realtà fisica.

D'altra parte usare i potenziali fa guadagnare un grado di libertà (la scelta di ψ) che può essere utile per semplificare la soluzione dei problemi elettromagnetici.

Per ricavare i potenziali, possiamo utilizzare le due equazioni di Maxwell inhomogenee, che non sono state ancora impiegate.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore

Cominciamo a sostituire le (4) nella seconda delle (1).

Ricordando che la permeabilità magnetica μ_0 è costante, e quindi può essere portata fuori dall'operatore ∇ , che è una derivata, si ha:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{A} \right) = j\omega\epsilon_0 (-j\omega \underline{A} - \nabla \phi) + \underline{J}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \underline{A} = \omega^2 \epsilon_0 \underline{A} - j\omega\epsilon_0 \nabla \phi + \underline{J}$$

$$\nabla \times \nabla \times \underline{A} = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \underline{A} - j\omega\epsilon_0 \mu_0 \nabla \phi + \mu_0 \underline{J}$$

Ricordando che $\nabla \times \nabla \times \underline{A} = \nabla \nabla \cdot \underline{A} - \nabla^2 \underline{A}$, cambiando di segno e raccogliendo i termini, si ottiene infine

$$\nabla^2 \underline{A} + \beta^2 \underline{A} = \nabla \nabla \cdot \underline{A} + j\omega\epsilon_0 \mu_0 \nabla \phi - \mu_0 \underline{J} = \nabla [\nabla \cdot \underline{A} + j\omega\epsilon_0 \mu_0 \phi] - \mu_0 \underline{J} \quad (6)$$

essendo $\beta = \sqrt{[\omega^2 \epsilon_0 \mu_0]}$ la costante di propagazione dello spazio libero.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore

Analogamente dalla terza delle (1) segue

$$\nabla^2 \phi = -j\omega \nabla \cdot \underline{A} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7)$$

Le (6,7) sono le equazioni per i potenziali, ma sono equazioni accoppiate.

Poiché però i potenziali possono essere variati secondo le (5) lasciando inalterati i campi (e le equazioni (6,7), ovviamente nei nuovi potenziali), cerchiamo, se esiste una nuova coppia di potenziali che conduce ad equazioni disaccoppiate.

Una possibilità per disaccoppiare tali equazioni è di cercare se esiste un ψ a cui corrispondono dei potenziali A' e ϕ' per cui l'espressione in parentesi quadra della (6) si annulli.

$$\begin{aligned} \underline{A}' &= \underline{A} + \nabla \psi & \nabla^2 \underline{A} + \beta^2 \underline{A} &= \nabla [\nabla \cdot \underline{A} + j\omega \epsilon_0 \mu_0 \phi] - \mu_0 \underline{J} \\ \phi' &= \phi - j\omega \psi & \nabla^2 \phi &= -j\omega \nabla \cdot \underline{A} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (5) \\ (6,7) \end{matrix}$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore

Imponiamo allora che

$$\nabla \cdot \underline{A}' + j\omega\epsilon_0\mu_0\phi' = 0$$

Usando le trasformazioni di gauge segue

$$\nabla \cdot \underline{A} + \nabla \cdot \nabla \psi + j\omega\epsilon_0\mu_0\phi + j\omega\epsilon_0\mu_0(-j\omega\psi) = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{A} + \nabla^2\psi + j\omega\epsilon_0\mu_0\phi + \beta^2\psi = 0$$

Quest'ultima è la cercata equazione per ψ

$$\nabla^2\psi + \beta^2\psi = -\nabla \cdot \underline{A} - j\omega\epsilon_0\mu_0\phi$$

in cui a secondo membro c'è un termine noto.

Poiché ψ fa variare i potenziali, ma non i campi, esso non richiede alcuna condizione al contorno e quindi l'equazione precedente ha sempre infinite soluzioni.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore

Pertanto esisterà sempre una coppia di potenziali (e in generale esisteranno infinite coppie) A e ϕ per cui vale la gauge di Lorentz

$$\nabla \cdot \underline{A} + j\omega\epsilon_0\mu_0\phi = 0 \quad (8)$$

Sostituendo la (8) nella(6), e $\nabla \cdot A$, ricavato dalla(8), nella(7), si ottengono le equazioni ai potenziali, nella gauge di Lorentz

$$\nabla^2 \underline{A} + \beta^2 \underline{A} = -\mu_0 \underline{J} \quad (9)$$

$$\nabla^2 \phi + \beta^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Si noti che sia le tre componenti cartesiane di A , sia ϕ , soddisfano alle stesse equazioni.

Le (9) sono dette equazioni delle onde(o equazioni di Helmholtz).

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore

Le(9)sono equazioni disaccoppiate, e quindi più semplici da risolvere. Inoltre la seconda delle(9) non è necessaria in quanto, noto \underline{A} , il potenziale scalare ϕ può essere ottenuto tramite derivate dalla gauge di Lorentz (8).

Infatti in molti casi le relazioni tra campi e potenziali sono espresse direttamente in termini della sola \underline{A}

$$\begin{aligned}\underline{E} &= -j\omega\underline{A} + \frac{1}{j\omega\epsilon_0\mu_0}\nabla\nabla\cdot\underline{A} = -j\omega\left[\underline{A} + \frac{1}{\beta^2}\nabla\nabla\cdot\underline{A}\right] \\ \underline{H} &= \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\underline{A}\end{aligned}\tag{10}$$

sostituendo ϕ dalla (8).

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore di un dipolo elementare

L'equazione d'onda(9) per il potenziale vettore di un dipolo elementare posto nell'origine può essere scritta come

$$\nabla^2 \underline{A} + \beta^2 \underline{A} = -\mu_0 I \Delta z \delta(\underline{r}) \underline{i}_z$$

ed è una equazione inomogenea.

Convieni cominciare a cercare una soluzione della equazione completa, che dipenda direttamente da J_D .

Poiché l'operatore è un operatore scalare, esprimendo A in componenti cartesiane, segue

$$\nabla^2 \underline{A} = (\nabla^2 A_x) \underline{i}_x + (\nabla^2 A_y) \underline{i}_y + (\nabla^2 A_z) \underline{i}_z$$

e quindi esiste un integrale particolare che ha solo componente z .

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore di un dipolo elementare

L'equazione d'onda diventa quindi

$$\nabla^2 A_z + \beta^2 A_z = -\mu_0 I \Delta z \delta(\underline{r}) \quad (13)$$

e avrà, per la simmetria del termine noto, una soluzione funzione solo di $r = |\underline{r}|$.

Introduciamo una nuova incognita A_0 , dipendente solo da r , definita da $A_z = A_0$.

Esprimendo il laplaciano in coordinate cilindriche, dopo alcuni passaggi si ha:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{d^2 A_0}{dr^2} + \beta^2 A_0 \right] = -\mu_0 I \Delta z \delta(r) \quad (14)$$

che è l'equazione d'onda da risolvere per ottenere il potenziale vettore di un dipolo elementare.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore di un dipolo elementare

Per $r \neq 0$ la (14) è una equazione omogenea, ed ha come soluzione

$$A_0(\underline{r}) = Be^{-j\beta r} + Ce^{+j\beta r} \quad \rightarrow \quad A_z(\underline{r}) = B \frac{e^{-j\beta r}}{r} + C \frac{e^{+j\beta r}}{r} \quad (15)$$

I due termini della (15) sono due onde che viaggiano in direzione radiale, il primo verso $r = +\infty$ e il secondo invece da $r = +\infty$ verso $r = 0$.

Quindi il primo termine è prodotto da sorgenti al finito, mentre il secondo può solo essere prodotto da sorgenti poste all'infinito.

Poiché l'unica sorgente è posta in $r = 0$, occorre prendere $C = 0$. Il valore di B dipende invece dalla ampiezza del dipolo.

Per calcolarlo sostituiamo $A_z(r)$ nella equazione (13).

Risulta

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \Delta z$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore di un dipolo elementare

Il potenziale vettore dipendente dal dipolo è quindi

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \Delta z \frac{e^{-j\beta r}}{r} \underline{i}_z \quad (16)$$

Nella (16), r è la distanza tra il punto campo, dove si richiede il potenziale vettore, e il punto sorgente, dove è il dipolo (finora posto in $r=0$).

Se il dipolo è posto in \underline{r}_D , il potenziale vettore è ancora dato da (16), ma $r = |\underline{r} - \underline{r}_D|$.

A partire dalla (16), si può poi calcolare il campo per derivazione, usando le (10).

La (16) fornisce una ulteriore informazione importante: il potenziale vettore del dipolo è allineato col dipolo stesso.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Potenziale Vettore di un dipolo elementare

Quindi il potenziale vettore, in un dato punto, è sempre proporzionale, mediante una funzione scalare detta funzione di Green (o risposta impulsiva), all'ampiezza del dipolo:

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-j\beta|\underline{r}-\underline{r}_D|}}{|\underline{r}-\underline{r}_D|} [I\Delta z \underline{i}_z] = g(|\underline{r}-\underline{r}_D|) [I\Delta z \underline{i}_z]$$

essendo

$$g(|\underline{r}-\underline{r}_D|) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-j\beta|\underline{r}-\underline{r}_D|}}{|\underline{r}-\underline{r}_D|}$$

la funzione di Green.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo di un dipolo elementare

In un sistema di riferimento sferico, il campo nel punto $P = (r, \theta, \phi)$, prodotto da un dipolo elementare di ampiezza $I\Delta z$, posto nell'origine, è:

$$\begin{aligned} E_r &= j \frac{\zeta \cdot I\Delta z}{2\lambda r} \left[0 + \frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right] e^{-j\beta r} 2 \cos \vartheta \\ E_\vartheta &= j \frac{\zeta \cdot I\Delta z}{2\lambda r} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right] e^{-j\beta r} \sin \vartheta \\ H_\phi &= j \frac{I\Delta z}{2\lambda r} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} + 0 \right] e^{-j\beta r} \sin \vartheta \end{aligned} \quad (17)$$

Queste espressioni valgono in tutto lo spazio (fatta eccezione per il punto in cui si trova il dipolo), ma sono abbastanza complesse, soprattutto da interpretare.

Tuttavia tali espressioni si possono semplificare nei due casi di punto campo P lontano dal dipolo, $\beta r \gg 1$ o vicino al dipolo $\beta r \ll 1$.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo di un dipolo elementare

Se $\beta r \gg 1$ si possono trascurare, nelle parentesi quadre della(17), tutti i termini rispetto a 1, e quindi anche E_r rispetto a E_θ .

In tal caso il campo diventa:

$$\begin{aligned} E_\theta &= j \frac{\zeta \cdot I \Delta z}{2\lambda r} e^{-j\beta r} \sin \vartheta \\ H_\varphi &= j \frac{I \Delta z}{2\lambda r} e^{-j\beta r} \sin \vartheta = \frac{1}{\zeta} E_\theta \end{aligned} \tag{18}$$

ovvero i campi variano con r allo stesso modo, e sono entrambi ortogonali alla direzione radiale (campi trasversi).

In termini vettoriali, dalla(18) segue

$$\underline{E} = \zeta \underline{H} \times \underline{i}_r \tag{19}$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo di un dipolo elementare

La presenza del fattore $e^{-j\beta r}$ mostra che il campo di un dipolo elementare si propaga, e si propaga in direzione radiale.

Infatti, nel DT , tale fattore diventa

$$\operatorname{Re}\left[e^{-j\beta r}e^{j\omega t}\right] = \cos(\beta r - \omega t)$$

ovvero identifica una onda che viaggia in direzione radiale (dal dipolo verso l'infinito).

Il campo (18) è quindi una onda sferica, con superfici equifase e equiampiezza sferiche.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo di un dipolo elementare

Se però osserviamo il campo (18) solo in una regione limitata dello spazio, le superfici sferiche equifase e equiampiezza sono indistinguibili da superfici piane.

Infatti una sfera di raggio R grande risulta indistinguibile dal suo piano tangente, se osservata in una zona di dimensioni piccole rispetto a R .

Ne segue che in una zona limitata dello spazio l'onda sferica (18) è indistinguibile da una onda piana, in quanto non solo ha superfici equifase e equiampiezza piane, ma vale anche la (19), che è la relazione tra i campi di una onda piana.

Ovviamente, come si vede dalla (19), l'onda piana viaggia in direzione radiale (nel punto di osservazione).

Poiché vale la sovrapposizione degli effetti, anche il campo di più dipoli, ovvero il campo di una qualunque distribuzione di correnti (che può sempre essere decomposta nella sovrapposizione di dipoli elementari), purché di estensione spaziale limitata, ha, per $\beta r \rightarrow \infty$, le stesse proprietà del campo di un dipolo.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo di un dipolo elementare

In particolare tale campo è una onda piana che viaggia verso l'infinito, e inoltre devono valere

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} r |\underline{E}| &< \infty \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r |\underline{H}| &< \infty \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r (\underline{E} - \zeta \underline{H} \times \underline{i}_r) &= 0\end{aligned}\tag{20}$$

Le (20), e in particolare l'ultima di queste, prendono il nome di condizioni di Sommerfeld, o condizioni di radiazione all'infinito.

Il significato fisico di queste condizioni è che, all'infinito, sia \underline{E} , sia \underline{H} devono essere infinitesime almeno del primo ordine, mentre la differenza $\underline{E} - \zeta \underline{H} \times \underline{i}_r$ deve esserlo di ordine superiore al primo.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Campo di un dipolo elementare

Passando al caso di campo vicino $\beta r \ll 1$, allora nella parentesi quadra possiamo trascurare tutti i termini rispetto all'ultimo, e porre anche $e^{-j\beta r}$ circa uguale ad 1.

Le(17) diventano allora

$$\begin{aligned} E_r &= j \frac{\zeta \cdot I \Delta z}{2\lambda r} \left(\frac{1}{j\beta r} \right)^2 2 \cos \vartheta \\ E_\vartheta &= j \frac{\zeta \cdot I \Delta z}{2\lambda r} \left(\frac{1}{j\beta r} \right)^2 \sin \vartheta \\ H_\varphi &= j \frac{I \Delta z}{2\lambda r} \left(\frac{1}{j\beta r} \right) \sin \vartheta \end{aligned} \tag{21}$$

Nelle (21), il campo \underline{E} ed il campo \underline{H} vanno all'infinito (per $r \rightarrow 0$) in modo diverso, e in particolare il campo magnetico è un infinito di ordine inferiore.

Ne segue che vicino a un dipolo il campo è essenzialmente elettrico (il campo magnetico è, entro certi limiti, trascurabile).

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Resistenza di ingresso:

Per un dipolo elementare, la resistenza di ingresso vale:

$$R_{irr} = \frac{2}{|I_0|^2} P_{irr} = \frac{\zeta}{(2\lambda)^2} \int h_M^2 \sin^2 \vartheta d\Omega = \frac{\zeta h_M^2}{4\lambda^2} \int \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{\zeta h_M^2}{4\lambda^2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi$$

ovvero:

$$R_{irr} = \frac{2\pi}{3} \zeta \left(\frac{h_M}{\lambda} \right)^2 \cong 800 \left(\frac{h_M}{\lambda} \right)^2$$

Per una antenna a $\lambda/2$ si trova invece che $R_{irr}=73.1 \, \Omega$.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Resistenza di ingresso:

In assenza di perdite la potenza irradiata è pari a quella che entra ai morsetti.

Se I_0 è la corrente di alimentazione, allora:

$$P_{IN} = \frac{1}{2} R_{IN} |I_0|^2 = P_{irr} = \frac{1}{2} R_{irr} |I_0|^2$$

per cui la resistenza di ingresso R_{IN} è pari ad R_{irr} .

In presenza di perdite si ha invece una potenza P_D dissipata sull'antenna e:

$$P_{IN} = P_{irr} + P_D$$

Introduciamo una efficienza η , ottenendo:

$$R_{IN} = \frac{1}{\eta} R_{irr}$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Direttività e Guadagno:

L'altezza efficace è una misura della irradiazione legata al campo.

Conviene introdurne anche una legata alla potenza, la direttività:

$$D = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(\vartheta, \varphi)}{\frac{1}{4\pi r^2} P_{irr}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\zeta} |E|^2}{\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{2\zeta} |E|^2 d\Omega}$$

con l'integrale esteso ad una sfera di raggio r .

L'effetto del limite è di poter usare il solo campo lontano e segue:

$$D = \frac{|h(\vartheta, \varphi)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int |h(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega}$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Direttività e Guadagno:

La funzione $D(\theta, \varphi)$ rappresenta il rapporto tra la potenza irradiata in una direzione e quella media, ovvero la capacità di concentrare la potenza in una direzione.

Spesso si usa il termine direttività anche per il valore massimo di $D(\theta, \varphi)$.

Per tenere conto delle eventuali perdite si introduce anche il guadagno:

$$G = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(\vartheta, \varphi)}{\frac{1}{4\pi r^2} P_{IN}}$$

Ovviamente **$G = \eta D$** .

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Direttività e Guadagno:

Tali perdite possono essere dovute ad esempio al fatto che i materiali conduttori con cui vengono realizzate le antenne non sono perfetti, ma hanno una conducibilità finita, oppure possono essere perdite dovute alla componente cross-polare del campo (ossia alla componente del campo ortogonale alla direzione in cui noi vogliamo trasmettere).

Si noti che la Direttività di una antenna non dipende dall'alimentazione, mentre vi dipende il Guadagno.

Se infatti l'antenna è alimentata da una linea di trasmissione, con potenza P_D , tale potenza P_D , se non c'è adattamento, è diversa dalla potenza di ingresso all'antenna, P_{IN} , e ovviamente $P_D > P_{IN}$.

Questo è dovuto al fatto che in ingresso all'antenna avrò un $\Gamma \neq 0$, che provoca la riflessione di parte della potenza incidente

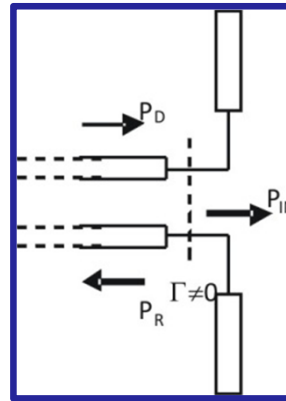
Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Direttività e Guadagno:

Si definisce allora come Guadagno Realizzato la quantità:

$$G_R = G \frac{P_{IN}}{P_D} = G(1 - |\Gamma|^2)$$



Dalla definizione di D segue poi:

$$D = \frac{\frac{1}{2\zeta} \frac{\zeta^2 |I_0|^2}{4\lambda^2 r^2} |h|^2}{\frac{1}{4\pi r^2} \frac{1}{2} R_{irr} |I_0|^2} = \frac{\pi \zeta |h|^2}{\lambda^2 R_{irr}}$$

e

$$G = \frac{\pi \zeta |h|^2}{\lambda^2 R_{IN}}$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Direttività e Guadagno:

Per una antenna a $\lambda/2$ si ha

$$D=1.64$$

e per una antenna elementare:

$$D = \frac{\pi \zeta |h|^2}{\lambda^2} \frac{1}{\frac{2\pi}{3} \zeta \frac{|h|^2}{\lambda^2}} = \frac{3}{2}$$

Le due direttività sono quindi molto simili.

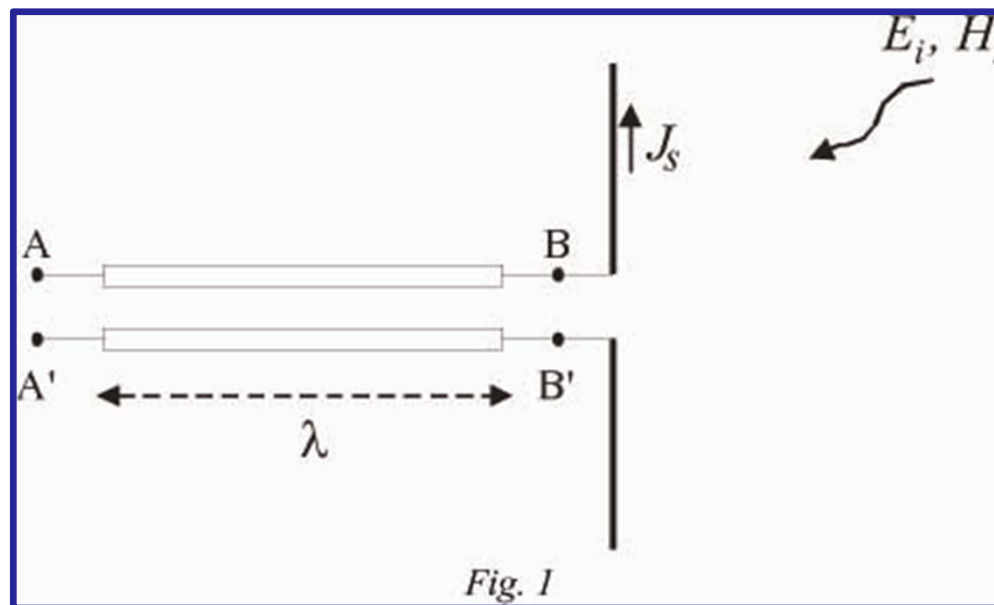
Tuttavia la resistenza di ingresso di una antenna a $\lambda/2$ è tale da consentire una alimentazione molto più facile.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Antenne in Ricezione

Prendiamo in considerazione una antenna immersa in un campo elettromagnetico (\underline{E}_i , \underline{H}_i), detto campo incidente e “misurato” in assenza dell’antenna.

Supponiamo che l’antenna sia collegata ad un carico da una struttura guidante schematizzata in Fig. 1 tramite una linea di trasmissione.

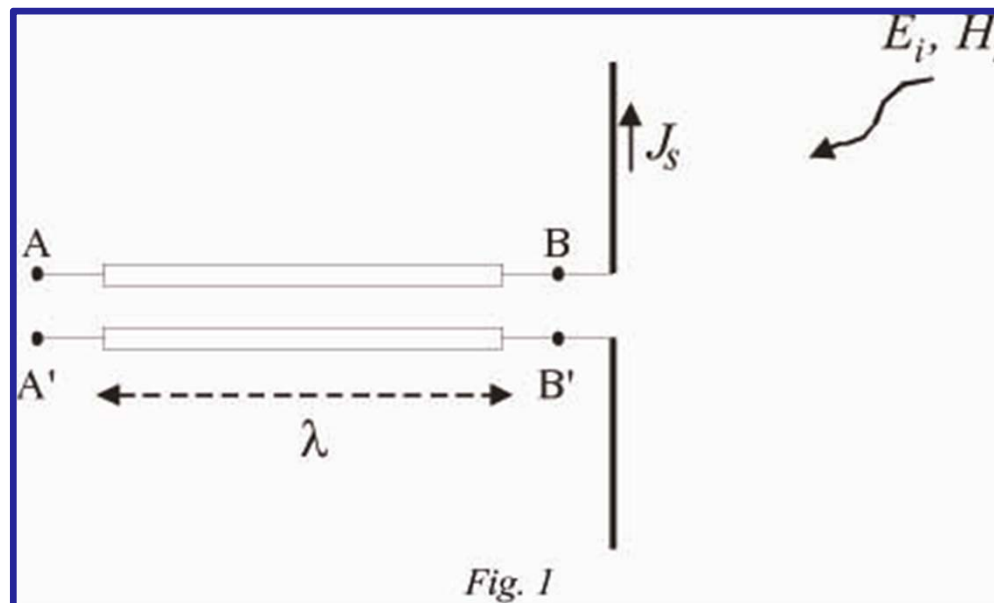


Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Antenne in Ricezione

Ipotizziamo inoltre che la struttura guidante sia sufficientemente lunga da poter individuare su di essa due morsetti AA' in cui i modi superiori che vengono eccitati alla connessione dell'antenna per effetto di discontinuità, transizioni e connettori, siano trascurabili.

La sezione AA' viene detta sezione di ingresso dell'antenna e le funzioni scalari di modo su AA' (relative alla particolare struttura guidante utilizzata) sono la tensione e la corrente in ingresso all'antenna.

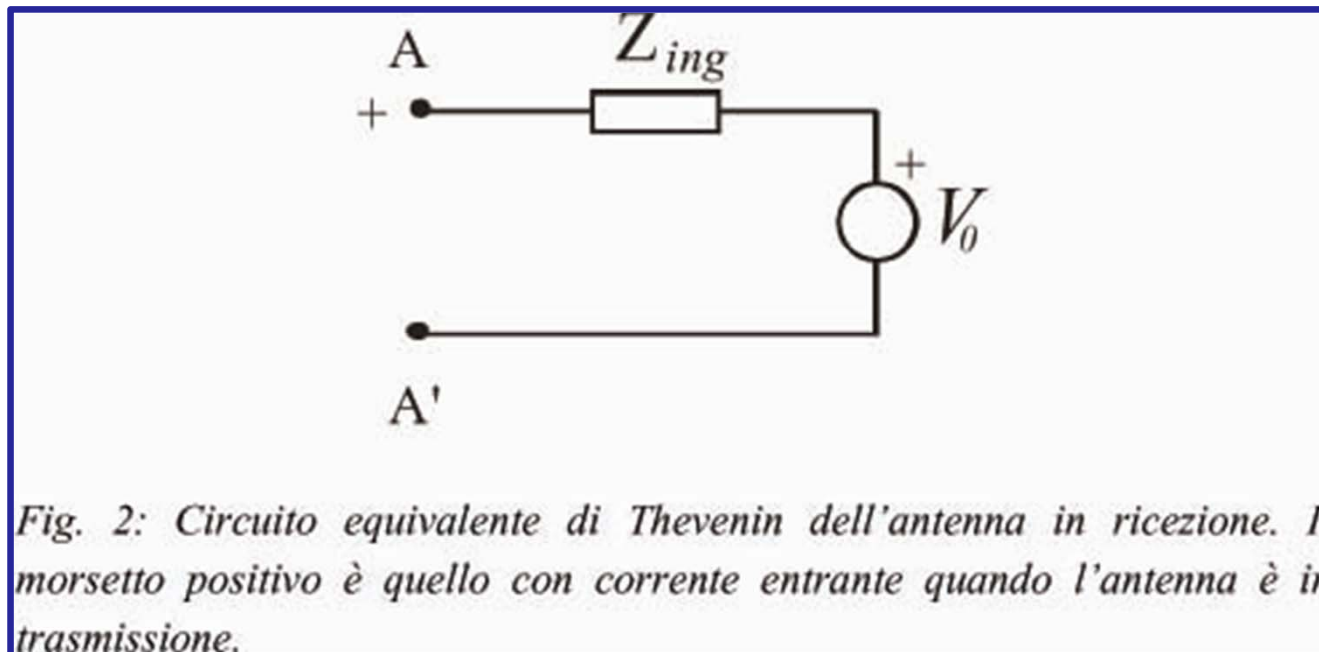


Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Antenne in Ricezione

L'interazione dell'antenna con il campo incidente produce un campo nella struttura guidante e cioè il segnale viene condotto al carico.

Per caratterizzare l'antenna dal punto di vista del carico, possiamo utilizzare il teorema di Thevenin ai morsetti AA' guardando verso l'antenna:



Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Antenne in Ricezione

L'impedenza Z_{ing} è quella che si vede guardando dai morsetti AA' in assenza di campo incidente.

Si tratta in sostanza della impedenza di ingresso dell'antenna in trasmissione.

V_0 prende il nome di tensione a vuoto e dipende dal campo incidente e dalla corrente da esso indotta sull'antenna.

La tensione a vuoto è l'integrale del campo totale $\underline{E}_{\text{tot}}$ sui morsetti dell'antenna e quindi dipende linearmente da $\underline{E}_{\text{tot}} = \underline{E}_i + \underline{E}_s$, dove \underline{E}_s è il campo dovuto alle correnti indotte che a sua volta dipende linearmente dal campo incidente \underline{E}_i .

Di conseguenza, la tensione a vuoto dipende linearmente da \underline{E}_i .

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Antenne in Ricezione

Considereremo per semplicità solamente il caso in cui l'antenna sia investita da un'onda piana (o localmente piana nella zona dell'antenna).

Data la distanza tra l'antenna trasmittente e la ricevente nelle normali applicazioni è generalmente lecito considerare l'onda in corrispondenza della ricevente come un'onda localmente piana.

In questo caso il campo elettromagnetico sui morsetti di ingresso dell'antenna è completamente individuato dal valore del campo incidente \underline{E}_i e dal vettore d'onda \underline{k} costante.

Risulta pertanto:

$$\underline{E}_i, \underline{k} \rightarrow V_0$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Antenne in Ricezione

Poiché, come detto, la dipendenza dal vettore \underline{E}_i è lineare, dovrà esistere un vettore \underline{h}_r con le dimensioni di una lunghezza e dipendente da \underline{k} tale che:

$$V_0 = \underline{h}_r(\underline{k}) \cdot \underline{E}_i$$

$\underline{h}_r(\underline{k})$ prende il nome di altezza efficace in ricezione dell'antenna.

La precedente espressione vale ovviamente solo se l'onda incidente sull'antenna è un'onda piana perché in questo caso il campo incidente dipende da un solo parametro e non da una funzione.

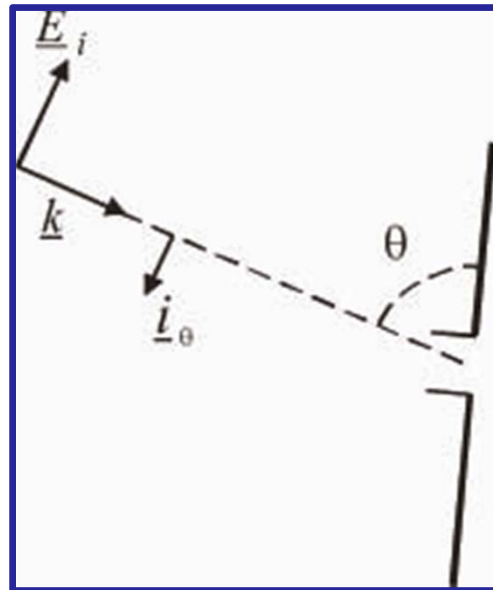
In caso contrario V_0 sarebbe l'integrale di tutto il campo incidente e la sua espressione molto più complessa.

L'altezza efficace in ricezione è uguale alla altezza efficace in trasmissione purché siano calcolate nella stessa direzione.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Antenne in Ricezione

Supponiamo di avere un'onda piana incidente in polarizzazione lineare e una antenna ricevente filiforme con altezza efficace in polarizzazione lineare.



La posizione dell'antenna per avere adattamento in polarizzazione è tale da disporre l'antenna nel piano formato dal vettore d'onda \underline{k} e dalla direzione del campo (o in un piano parallelo). In questo caso infatti l'altezza efficace è parallela al campo elettrico incidente.

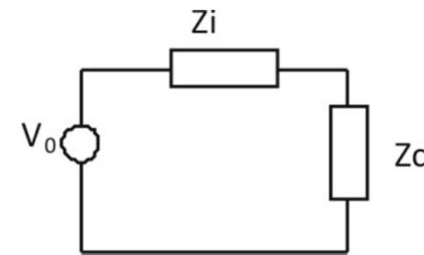
Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Potenza Ricevuta:

La potenza ricevuta da un carico Z_c è pari a:

$$P_c = \frac{1}{2} R_c \frac{|V_0|^2}{|Z_i + Z_c|^2} = \frac{1}{2} R_c \frac{|\underline{h} \cdot \underline{E}_i|^2}{(R_i + R_c)^2 + (X_i + X_c)^2}$$



Per un fissato campo incidente la potenza può essere massimizzata variando Z_c e l'orientazione della antenna (ovvero \underline{h}).

Rispetto a Z_c il massimo si ha per

$$\mathbf{Z_c} = \mathbf{Z_i}^*$$

(adattamento del carico).

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Potenza Ricevuta:

Per quanto riguarda \underline{h} notiamo che è possibile esprimere V_0 in termini di un prodotto scalare definito su uno spazio di Hilbert:

$$(\underline{A}, \underline{B}) \equiv \underline{A}^* \cdot \underline{B}$$

Da cui segue che:

$$V_0 = (\underline{h}^*, \underline{E}_i)$$

Possiamo allora applicare la disuguaglianza di Schwartz:

$$|V_0| = |(\underline{h}^*, \underline{E}_i)| \leq \|\underline{h}^*\| \cdot \|\underline{E}_i\| = |\underline{h}| \cdot |\underline{E}_i|$$

e $|V_0| = |\underline{h}| \cdot |\underline{E}_i|$ solo se $\underline{E}_i = \alpha \underline{h}^*$ con α generico scalare complesso.

Il massimo si ha quindi in quest'ultimo caso (ovviamente per \underline{h} che può variare solo in direzione).

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Potenza Ricevuta:

La potenza massima è allora:

$$P_{C_{\max}} = \frac{1}{2} R_c \frac{|\underline{h}|^2 |\underline{E}_i|^2}{4R_c^2} = \frac{|\underline{h}|^2 |\underline{E}_i|^2}{8R_c} \quad \text{Adattamento in Polarizzazione}$$

che è proporzionale ad $|\underline{S}_i|$, vettore di Poynting del campo incidente.

Si noti che l'adattamento in polarizzazione richiede preliminarmente che antenna e campo incidente abbiano la stessa polarizzazione.

Solo allora si può verificare $\underline{E}_i = \alpha \underline{h}^*$ ruotando la ricevente.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Potenza Ricevuta:

Se non è verificato l'adattamento in polarizzazione, si introduce il Fattore di Depolarizzazione DF:

$$DF = \frac{\left| \left(\underline{h}^*, \underline{E}_i \right) \right|^2}{\left| \underline{h} \right|^2 \cdot \left| \underline{E}_i \right|^2}$$

DF mi dice di quanto si riduce la potenza ricevuta in caso di mancato adattamento in polarizzazione.

Infatti si ha:

$$\left| V_0 \right|^2 = \begin{cases} \left| \underline{h} \right|^2 \cdot \left| \underline{E}_i \right|^2 & \text{Adattamento in polarizzazione} \\ \left| \underline{h} \right|^2 \cdot \left| \underline{E}_i \right|^2 \frac{\left| \left(\underline{h}^*, \underline{E}_i \right) \right|^2}{\left| \underline{h} \right|^2 \cdot \left| \underline{E}_i \right|^2} = \left| \underline{h} \right|^2 \cdot \left| \underline{E}_i \right|^2 DF & \text{Disadattamento in polarizzazione} \end{cases}$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Area Efficace:

Si definisce area efficace il rapporto $P_{cmax}/|S_i|$ (per onda incidente piana).

Risulta:

$$A = \frac{P_{cMAX}}{|S_i|} = \left(\frac{|\underline{h}|^2 |\underline{E}_i|^2}{8R_c} \right) \cdot \left(\frac{2\zeta}{|\underline{E}_i|^2} \right) = \frac{\zeta |\underline{h}|^2}{4R_c}$$

D'altra parte è noto che la Direttività (il Guadagno) è anch'essa proporzionale ad $|\underline{h}|^2$ e quindi, per mezzi reciproci:

$$\frac{A}{G} = \frac{\zeta}{4R_c} |\underline{h}|^2 \frac{\lambda^2 R_i}{\pi \zeta |\underline{h}|^2} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad \text{essendo } R_i = R_c \text{ (adattamento)}$$

In genere A è dell'ordine di grandezza della area geometrica dell'antenna, e quindi il guadagno, a parità di dimensioni, cresce con la frequenza.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Polarizzazione:

I tipi di polarizzazione sono tre: circolare, ellittica e lineare.

Le condizioni di polarizzazione lineare e circolare sono:

Polarizzazione Lineare:

$$\underline{A} \times \underline{B} = 0$$

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ \angle E_x = \angle E_y + \pi + n\pi \end{cases}$$

Deve verificarsi una delle tre condizioni

Polarizzazione Circolare:

$$\begin{cases} \underline{A} \cdot \underline{B} = 0 \\ |\underline{A}| = |\underline{B}| \\ |E_x| = |E_y| \\ \angle E_x = \angle E_y + \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}$$

Devono verificarsi entrambe le condizioni

con: $\underline{E} = E_x \underline{i}_x + E_y \underline{i}_y = \underline{A} + j\underline{B}$

$$\underline{A} = (A_x, A_y), \underline{B} = (B_x, B_y)$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Polarizzazione:

Ogni sistema di telecomunicazioni ha una sua ben definita polarizzazione e le antenne relative devono conformarsi a tale polarizzazione, che è usualmente lineare o circolare, pena una riduzione della potenza ricevuta.

Infatti se il campo incidente \underline{E}_i ha una data polarizzazione e l'antenna ha altezza efficace h non adattata ad \underline{E}_i ($\underline{h} \neq \alpha \underline{E}_i$) la potenza ricevuta vale:

$$P_r = A \cdot S_i \cdot \frac{|\underline{h} \cdot \underline{E}_i|^2}{|\underline{h}|^2 |\underline{E}_i|^2}$$

essendo A l'area efficace ed \underline{S}_i il vettore di Poynting dell'onda incidente.

Il terzo termine tiene conto della differenza di polarizzazione e prende il nome di fattore di depolarizzazione.

Evidentemente è richiesto che tale fattore sia molto prossimo ad 1.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Polarizzazione:

Fa eccezione il caso di comunicazione con terminali mobili (es. telefonia cellulare) in cui si usa la polarizzazione circolare per avere un collegamento indipendente dalla orientazione dell'antenna ricevente (nel piano ortogonale al collegamento).

Per semplicità si usa spesso una antenna polarizzata linearmente accettando la perdita di 3 dB nel collegamento.

Lo stesso problema si ha in trasmissione.

Il campo irradiato E_{irr} può essere decomposto in una componente nella polarizzazione nominale (co-polare) E_c ed una ad essa ortogonale (cross-polare) E_x .

Risulta ovviamente , ma nella valutazione del guadagno occorre usare solo E_c .

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Polarizzazione:

Usando le espressioni del campo lontano (zona di Fraunhofer) si ha:

$$G = \frac{4\pi r^2 |E_C|^2 / 2\zeta}{P_{IN}} \leq \frac{4\pi r^2 |E_{irr}|^2 / 2\zeta}{P_{IN}}$$

La potenza irradiata nella componente cross-polare è quindi potenza persa, e va ridotta il più possibile.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Rapporto Assiale:

Non sempre è possibile realizzare una polarizzazione lineare o circolare perfetta.

Conviene allora avere un parametro che consenta di valutare la “qualità” di una data polarizzazione.

Tale parametro è il rapporto assiale, o “axial ratio”, definito come il rapporto tra i due assi dell’ellisse di polarizzazione e generalmente indicato con AR:

$$AR = \sqrt{\frac{AsseMaggiore}{AsseMinore}} \geq 1$$

Occorre in pratica misurare la bontà di una certa polarizzazione (rispetto ai casi ideali di polarizzazione lineare o circolare, che sono impossibili da realizzare fisicamente per la presenza di inevitabili errori di misura) e questo si ottiene mediante il rapporto assiale (axial ratio).

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Rapporto Assiale:

L'axial ratio mi dice di quanto la mia polarizzazione si discosta dal caso ideale.

Evidentemente un AR prossimo ad 1 indica una buona polarizzazione circolare (in cui $AR=1$) e un AR molto grande indica una buona polarizzazione lineare (in cui AR è infinito).

La polarizzazione circolare ideale ha $AR=1$, quella lineare ideale ha $AR=\infty$.

Per determinare l'AR si può ricorrere a una delle proprietà degli assi di una conica.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Rapporto Assiale:

A partire dalla equazione geometrica dell'ellisse di polarizzazione:

$$a_{xx}x^2 - 2a_{xy}xy + a_{yy}y^2 = R^2 \quad \text{con} \quad R^2 = \Delta^2 = (B_x A_y - A_x B_y)$$

si costruisce la matrice:

$$\begin{pmatrix} a_{xx} & -a_{xy} \\ -a_{xy} & a_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x^2 + B_x^2 & -(A_x A_y + B_x B_y) \\ -(A_x A_y + B_x B_y) & A_y^2 + B_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_x|^2 & -\text{Re}\{E_x E_y^*\} \\ -\text{Re}\{E_x E_y^*\} & |E_y|^2 \end{pmatrix}$$

dove si ricorda che:

$$\underline{E} = E_x \underline{i}_x + E_y \underline{i}_y = \underline{A} + j\underline{B}$$

$$\underline{A} = (A_x, A_y), \underline{B} = (B_x, B_y)$$

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Parametri di una Antenna

Rapporto Assiale:

Gli autovalori di questa matrice sono i semiassi dell'ellisse e la radice quadrata del loro rapporto è AR.

Si noti che nella seconda forma il calcolo è applicabile anche ad un campo sempre ortogonale ad una direzione (l'asse z).

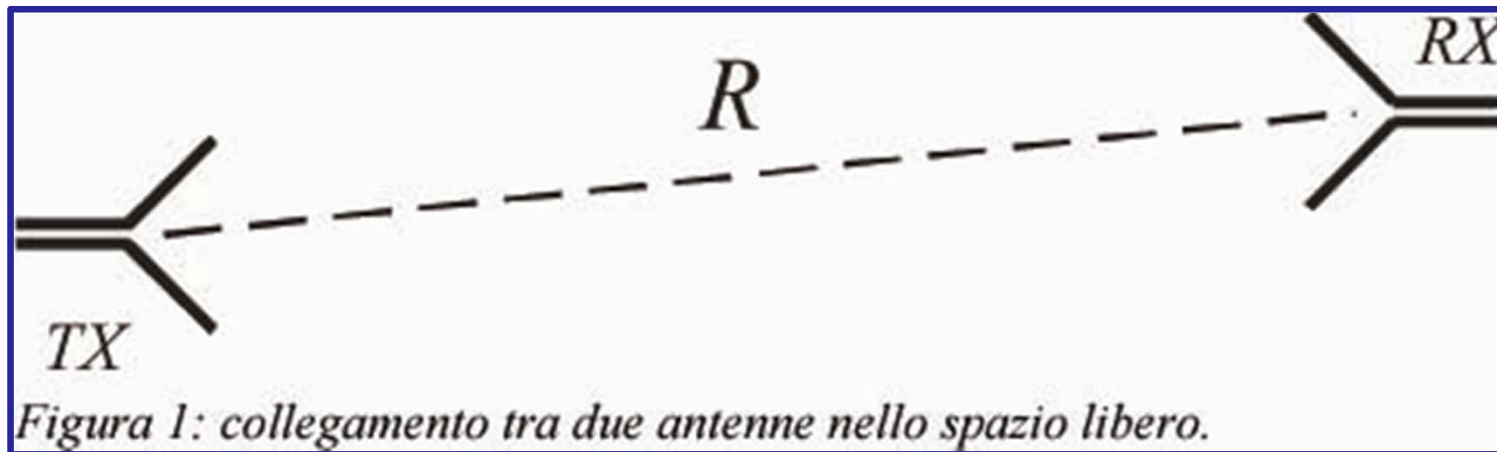
Se la polarizzazione non è perfetta l'AR varia rispetto al caso ideale, con conseguente riduzione del fattore di depolarizzazione.

Confrontando i due tipi di polarizzazione, si dimostra che la polarizzazione circolare è più robusta alle imprecisioni realizzative (o più precisamente alla presenza di polarizzazione incrociata) ed è inoltre insensibile alla orientazione relativa tra campo e ricevente. Per questo viene largamente utilizzata.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Collegamenti

Supponiamo di avere due antenne, una trasmittente TX e una ricevente RX e consideriamo il collegamento tra queste due antenne distanti



Siano D_R e D_T rispettivamente il diametro della ricevente e della trasmittente.

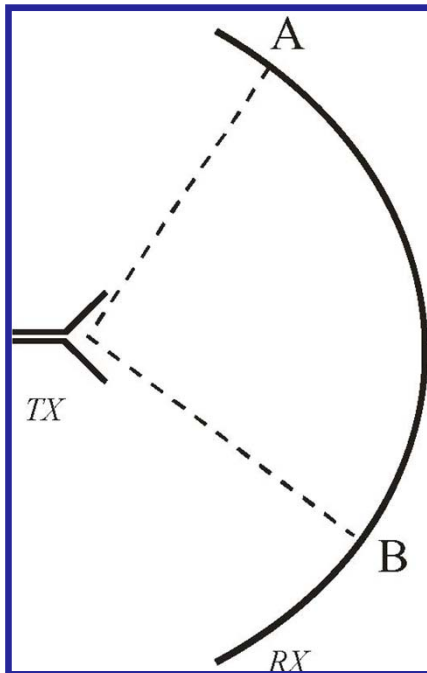
Sappiamo che, se l'antenna ricevente RX è investita da un'onda piana (o localmente piana) singola, la tensione ricevuta può essere calcolata a partire dalla altezza efficace in ricezione che coincide con l'altezza efficace in trasmissione della RX.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Collegamenti

Tuttavia, il fatto che ogni punto della ricevente sia in zona di Fraunhofer della trasmittente, è una condizione necessaria ma non sufficiente affinché ciò si verifichi.

Quello che si richiede è che il fronte di fase sia piano in ogni punto della ricevente qualunque punto della trasmittente lo produca.



Consideriamo la situazione in figura.

Tutti i punti della antenna RX sono in zona di Fraunhofer della antenna TX ma il fronte di fase in corrispondenza di ogni punto della RX non è piano perché punti diversi dell'antenna ricevente vedono la trasmittente sotto angoli diversi: nel punto A della RX l'onda della TX è localmente piana; nel punto B della RX l'onda è localmente piana.

Tuttavia le direzioni delle due onde localmente piane sono diverse perché le direzioni dei raggi congiungenti TX-A e TX-B non possono essere considerate parallele.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Collegamenti

Per poter calcolare la tensione a vuoto sull'antenna RX in termini della sua altezza efficace occorre che tutti i punti della RX siano investiti da una singola onda piana (localmente piana).

E' facile intuire che questa condizione è soddisfatta se l'antenna ricevente è in zona di Fraunhofer della trasmittente ma anche l'antenna trasmittente è in zona di Fraunhofer della ricevente.

Si può dimostrare che affinché ciò si verifichi è sufficiente richiedere che la distanza R del collegamento sia tale da trovarsi in zona di Fraunhofer di una antenna di dimensioni pari alla somma delle dimensioni delle due antenne RX e TX ($D_T + D_R$).

Si osservi che quest'ultima è la condizione (implicita) sotto la quale abbiamo dimostrato l'eguaglianza delle altezze efficaci in ricezione e trasmissione e sotto questa ipotesi è possibile calcolare la tensione a vuoto sulla ricevente a partire dalla altezza efficace in trasmissione della ricevente stessa.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Collegamenti

Consideriamo una antenna trasmittente con guadagno G_T che trasmette una potenza P_T (potenza in ingresso alla trasmittente) ad una antenna ricevente a distanza R adattata al carico e in polarizzazione e di area efficace A_R .

Nel seguito indicheremo con il pedice R tutti i parametri relativi all'antenna ricevente e con il pedice T tutti i parametri relativi all'antenna trasmittente.

Sia S_i il vettore di Pointyng relativo al campo della trasmittente.

Ricordando che:
$$G_T = \frac{S_i}{\frac{1}{4\pi R^2} P_T}$$

si ha

$$S_i = \frac{G_T P_T}{4\pi R^2}$$

che è il vettore di Poynting alla ricevente posta a distanza R dalla trasmittente.

Fondamenti e Richiami di Campi Elettromagnetici

Collegamenti

Per una antenna in ricezione adattata al carico e in polarizzazione si ha $P_R = A_R S_i$. Risulta pertanto:

$$P_R = A_R \frac{G_T}{4\pi R^2} P_T$$

D'altra parte l'area efficace della ricevente è legata al guadagno dalla seguente relazione:

$$G_R = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_R$$

Si ottiene quindi la Formula di Friis per il collegamento:

$$P_R = G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 P_T$$

A parità di guadagno, la potenza aumenta con la lunghezza d'onda (ovvero uno stesso valore di R è più vicino a bassa frequenza che ad alta).

TEORIA DEI RAGGI – OTTICA GEOMETRICA

Onda piana: descritta dalla direzione \underline{k} individuata dal vettore di propagazione, o dal piano ortogonale a \underline{k} su cui il campo è costante (piani equifase).

Una onda qualsiasi, che possenga un insieme di superfici equifase (fronti d'onda), tra loro non intersecantisi, e un insieme di curve, che punto per punto sono ortogonali alle superfici equifase e possono essere considerate le **traiettorie** di propagazione dell'onda, può essere studiata mediante la teoria dei raggi.

In un mezzo omogeneo le superfici equifase possono avere forma qualunque (piana, sferica, cilindrica), ma i raggi (traiettorie) sono sempre rettilinei.

Onda piana: i raggi sono un fascio di rette parallele

Onda sferica: i raggi si intersecano tutti in un punto (centro di fase dell'onda sferica).

TEORIA DEI RAGGI – OTTICA GEOMETRICA

Il centro di fase della onda sferica può essere considerato come la posizione della sorgente dell'onda.

La “sorgente” di una onda piana è invece all'infinito.

Se la sorgente di una onda sferica è “molto lontana” rispetto alla zona in cui la osserviamo, questa può essere approssimata con una onda piana.

“Ottica Geometrica”:

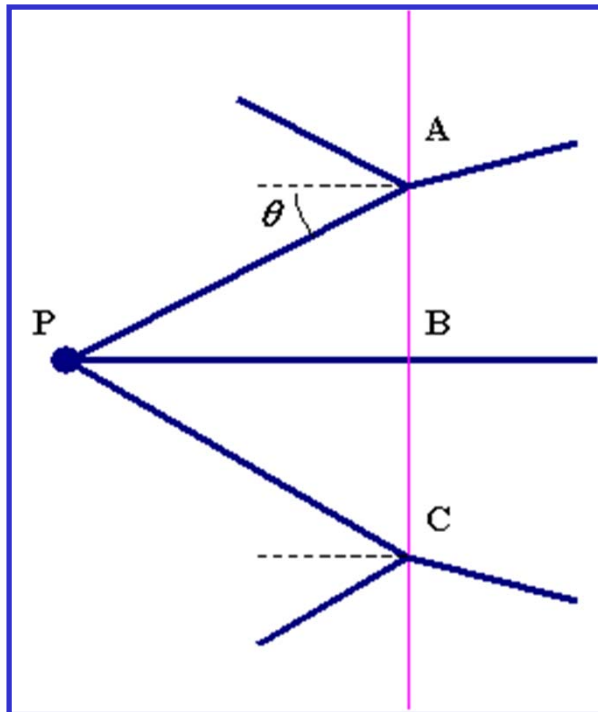
- utilizzabile nelle zone in cui le proprietà dei materiali variano lentamente rispetto alla lunghezza d'onda (e rispetto al raggio di curvatura delle superfici equifase).
- non utilizzabile nelle discontinuità

TEORIA DEI RAGGI – OTTICA GEOMETRICA

E' possibile superare questa limitazione se si assume che ogni raggio interagisca con la discontinuità isolatamente dagli altri.

Si considera come interazione del raggio con la discontinuità, la interazione che avrebbe una onda piana diretta come il raggio.

Consideriamo tre raggi di una onda sferica che parte da P.



Il raggio che arriva in A sulla superficie, con un angolo θ , viene riflesso e trasmesso con le stesse leggi (legge di Snell e formule di Fresnel) di una onda piana che incide sulla superficie con angolo di incidenza θ .

Analogamente avviene per gli altri raggi.

TEORIA DEI RAGGI – OTTICA GEOMETRICA

L'ipotesi di interazioni “locali” dei raggi con le superfici può essere ulteriormente estesa al caso di superfici non piane, purché con raggio di curvatura grande rispetto a λ .

Il raggio che incide in A con un angolo θ rispetto alla normale alla superficie viene riflesso e rifratto come una onda piana che incide, con un angolo θ , sul **piano tangente** in A alla superficie.

Il concetto di raggio consente di analizzare, e risolvere, un gran numero di problemi elettromagnetici per i quali la soluzione esatta è oltremodo onerosa.

